曲率与挠率

命题 1. 设 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，$\Delta\theta$ 为 $\boldsymbol{a}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{a}(s)$ 的夹角，则

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

证明.

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

□

上述命题说明了单位向量的导数与角度变化的速度之间的关系，而角度变化速度反映了曲线的弯曲程度，由此定义曲率如下.

定义 1 (曲率)**.** 设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，称

$$\kappa(s) = |\dot{\boldsymbol{t}}| = |\ddot{\boldsymbol{r}}|$$

为曲线 C 在 s 处的**曲率**.

注. $\kappa \geqslant 0$，曲率与参数选取无关，且在 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换下不变.

例 1. 曲线是直线当且仅当 $\kappa \equiv 0$.

证明. 若曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是直线，设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{t}|=|\dot{\boldsymbol{r}}|=|\boldsymbol{a}|=1$. 则 $\kappa=|\ddot{\boldsymbol{r}}|=0$.

反之，$\kappa\equiv 0$，则 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{0}$，积分，得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}.$$

于是曲线是直线. □

注. $\kappa(s)=0$ 可能在曲线 C 上某一点成立，例如带拐点的函数曲线在拐点处 $\kappa=0$.

例 2. 半径为 R 的圆的曲率 $\kappa=1/R$.

注. κ 为常数不一定是圆，例如圆柱螺线. 只有将曲线限制在平面上时，κ 为非零常数才能反推曲线是圆.

定义 2 (曲率半径)**.** 当 $\kappa>0$ 时，

$$R(s)=\frac{1}{\kappa(s)}$$

称为曲线在 s 处的**曲率半径**.

定义 3 (曲率中心)**.** 曲线 C 在 s 处的曲率半径 $R(s)$ 存在时，称

$$\boldsymbol{r}^*(s) = \boldsymbol{r}(s) + R(s)\boldsymbol{n}(s)$$

为曲线 C 在 s 处的曲率中心.

定义 4 (密切圆)**.** 以曲线 C 在 s 处的曲率中心 $\boldsymbol{r}^*(s)$ 为圆心、曲率半径 $R(s)$ 为半径的圆称为曲线 C 在 s 处的**密切圆**.

定义 5 (渐屈线)**.** 曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率中心的轨迹 $\boldsymbol{r}^*(s)$ 也是一条曲线，称为 $\boldsymbol{r}(s)$ 的**渐屈线**.

注. *这里 s 不再是 $\boldsymbol{r}^*$ 的弧长参数.*

命题 2. 对 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$，有 $\dot{\boldsymbol{b}} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{n}$.

证明. 因为 $|\boldsymbol{b}| = 1$，于是 $\boldsymbol{b} \perp \dot{\boldsymbol{b}}$. 下证 $\dot{\boldsymbol{b}} \perp \boldsymbol{t}$.

因为 $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，两边求导，得

$$\dot{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{b}} = 0.$$

即

$$\kappa \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{b}} = 0.$$

而 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，于是 $\boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{b}} = 0$，即 $\dot{\boldsymbol{b}} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{t}$. □

定义 6 (挠率)**.** 存在 $\tau \in \mathbb{R}$ 使得 $\dot{\boldsymbol{b}} = -\tau \boldsymbol{n}$，称 τ 为曲线 C 在 s 处的**挠率**.

注. *由于历史原因 τ 前多了一个负号. 当 $\tau > 0$ 时，曲线沿 $\boldsymbol{b}$ 的方向穿过密切平面；当 $\tau < 0$ 时，曲线沿 $-\boldsymbol{b}$ 的方向穿过密切平面.*

例 3. 圆柱螺线的曲率和挠率

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

都为常数.

定义 7 (一般螺线)**.** 切向量与固定方向的夹角为常数 θ 的曲线称为**一般螺线**.

命题 3. 曲线 C 为一般螺线当且仅当存在常数 c 使得 $\tau = c\kappa$.

定理 1. 曲线 C 为平面曲线当且仅当 $\tau \equiv 0$.

证明. “$\Leftarrow$”: $\tau=0 \iff \dot{\boldsymbol{b}}=-\tau N=0 \iff \boldsymbol{b}$ 是常向量. 于是

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

关于 s 积分，得 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=a$，这里 a 是常数. 设 $\boldsymbol{\rho}$ 是平面方程的变量，则 $\boldsymbol{r}$ 落在平面 $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{b}=a$ 内.

“$\Rightarrow$”: 设曲线 $C\subset H$ 平面，H 的法向量为 $\boldsymbol{n}_0$，则 $\boldsymbol{r}(s)\perp\boldsymbol{n}_0$. 由 $(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0$ 可知 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}$ 落在平面 H 内，于是 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ 为 H 的单位法向量且连续，于是 $\boldsymbol{b}$ 是常向量，$\dot{\boldsymbol{b}}=0$，故 $\tau=0$. □

命题 4. 在一般参数 t 下，有

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3},\qquad \tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}.$$

证明. □